第 2 节 基本不等式的核心运用思想（★★★）

强化训练

1．（2022·江苏连云港模拟·★★）已知 $a>0$，$b>0$，$a+\frac{1}{b}=1$，则 $\frac{b}{a}$ 的最小值为_____.

答案：4

解析：若看不出如何凑定值，不妨先消元再看，

由 $a+\frac{1}{b}=1$ 可得 $b=\frac{1}{1-a}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-a}=\frac{1}{a(1-a)}$ ①，

因为 $b>0$，所以 $a<1$，又 $a>0$，所以 $0<a<1$，

注意到式①的分母满足和为定值，故可直接求分母的最大值，此时整个式子也就最小，

因为 $0<a(1-a)\le(\frac{a+1-a}{2})^2=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{a(1-a)}\ge 4$，取等条件是 $a=1-a$，即 $a=\frac{1}{2}$，故 $(\frac{b}{a})_{\min}=4$.

2．（★★）若 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，则 $\frac{xy}{2x+y}$ 的最大值为_____.

答案：$\frac{1}{9}$

解析：所给分式的分子分母不齐次，可尝试通过“1”的代换将它们齐次化，凑出“积定”，

$$\frac{xy}{2x+y}=\frac{xy}{(2x+y)\cdot 1}=\frac{xy}{(2x+y)(x+2y)}=\frac{xy}{2x^2+5xy+2y^2}$$

$$=\frac{1}{\frac{2x}{y}+5+\frac{2y}{x}}=\frac{1}{\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+5}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}+5}=\frac{1}{9},$$

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$ 时取等号，结合 $x+2y=1$ 可得此时 $x=y=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{xy}{2x+y}$ 的最大值为 $\frac{1}{9}$.

【反思】本题若将 $\frac{xy}{2x+y}$ 上下同除以 xy，就化为 $\frac{1}{\frac{2}{y}+\frac{1}{x}}$，故只需求分母的最小值，这就是“1”的代换题型了；甚至本题也能消元做，只是系数稍麻烦.

3．（2023·贵州模拟·★★）已知实数 x，y 满足 $x^2-xy+y^2=2$，则 x^2+y^2 的最大值为（　　）

（A）1　（B）2　（C）$2\sqrt{2}$　（D）4

答案：D

解析：所给等式中已有目标 x^2+y^2，故把 xy 也化为 x^2+y^2，即可统一结构，

因为 $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $2=x^2-xy+y^2\ge x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}$，故 $x^2+y^2\le 4$，

取等条件是 $x=y=\sqrt{2}$，所以 x^2+y^2 的最大值为 4.

提醒：以下几题均为中档或中档偏上难度.

4.（2023•重庆模拟•★★★）已知 $x>0$，$y>0$，$xy+x-2y=4$，则 $2x+y$ 的最小值是（　　）

（A）4　（B）5　（C）7　（D）9

答案：C

解析：要求和的最小值，应凑“积定”，直接凑不易，可先由所给等式反解出 x，代入消元再看，

$xy+x-2y=4\Rightarrow x(y+1)=2y+4\Rightarrow x=\dfrac{2y+4}{y+1}$ ①，

代入 $2x+y$ 可得 $2x+y=2\cdot\dfrac{2y+4}{y+1}+y=2\cdot\dfrac{2(y+1)+2}{y+1}+y=2(2+\dfrac{2}{y+1})+y=\dfrac{4}{y+1}+y+4$

$=\dfrac{4}{y+1}+(y+1)+3\ge 2\sqrt{\dfrac{4}{y+1}\cdot(y+1)}+3=7$，

取等条件是 $\dfrac{4}{y+1}=y+1$，结合 $y>0$ 解得：$y=1$，

代入①得 $x=3$，所以 $2x+y$ 的最小值是 7.

5.（2020•江苏卷•★★★）已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$，则 x^2+y^2 的最小值为_____.

答案：$\dfrac{4}{5}$

解析：由所给等式容易反解出 x^2，可代入 x^2+y^2 消元再分析最值，

因为 $5x^2y^2+y^4=1$，所以 $x^2=\dfrac{1-y^4}{5y^2}$，故 $x^2+y^2=\dfrac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\dfrac{1}{5y^2}-\dfrac{y^2}{5}+y^2=\dfrac{1}{5y^2}+\dfrac{4y^2}{5}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{5y^2}\cdot\dfrac{4y^2}{5}}=\dfrac{4}{5}$，

当且仅当 $\dfrac{1}{5y^2}=\dfrac{4y^2}{5}$ 时取等号，解得：$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $x=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，所以 x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$.

6.（★★★）已知 $x>0$，$y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，则 $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{y}{y-4}$ 的最小值为_____.

答案：$2\sqrt{2}+3$

解析：目标式较复杂，不易看出如何凑定值，可考虑结合所给等式消元，目标式中 y 的部分更简单，故消 y，

因为 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，所以 $y=\dfrac{4x}{x-1}$，又 $x>0$，$y>0$，所以 $x>1$，

将 $y=\dfrac{4x}{x-1}$ 代入目标式可得 $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{y}{y-4}=\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{\frac{4x}{x-1}}{\frac{4x}{x-1}-4}=\dfrac{x^2}{x-1}+x$，

若不知道接下来如何凑定值，可将分母换元再看，设 $t=x-1$，则 $x=t+1$，因为 $x>1$，所以 $t>0$，

$\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{y}{y-4}=\dfrac{x^2}{x-1}+x=\dfrac{(t+1)^2}{t}+t+1=\dfrac{t^2+2t+1}{t}+t+1=t+2+\dfrac{1}{t}+t+1=2t+\dfrac{1}{t}+3\ge 2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1}{t}}+3=2\sqrt{2}+3$，

当且仅当$2t=\frac{1}{t}$时取等号，此时$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，满足题意，所以$\frac{x^2}{x-1}+\frac{y}{y-4}$的最小值为$2\sqrt{2}+3$.

7．（★★★）若$a>0$，$b>0$，且$ab=2a+b+16$，则ab的最小值为_____.

答案：32

解析：本题可以消元，但若发现条件中已有求最值的目标ab，故把剩下的$2a+b$也化为ab，就能统一结构，

由题意，$ab=2a+b+16\ge 2\sqrt{2ab}+16$，所以$ab-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab}-16\ge 0$，故$(\sqrt{ab}+2\sqrt{2})(\sqrt{ab}-4\sqrt{2})\ge 0$，

解得：$\sqrt{ab}\ge 4\sqrt{2}$，所以$ab\ge 32$，当且仅当$2a=b$时取等号，

代入$ab=2a+b+16$可求得$\begin{cases}a=4\\b=8\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=-4\end{cases}$（舍去），所以$ab$的最小值为32.

8．（2023•湖北模拟•★★★）若正数x，y满足$x+2y=2$，则$\frac{y^2+x}{xy}$的最小值为_____.

答案：$\sqrt{2}+1$

解析：所给分式的分子分母不齐次，可尝试通过常数代换将它们齐次化，凑出“积定”，

由题意，$\frac{y^2+x}{xy}=\frac{2y^2+2x}{2xy}=\frac{2y^2+(x+2y)x}{2xy}$

$=\frac{2y^2+x^2+2xy}{2xy}=\frac{y}{x}+\frac{x}{2y}+1\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{2y}}+1=\sqrt{2}+1$，

取等条件是$\frac{y}{x}=\frac{x}{2y}$，结合$x+2y=2$可得$x=2\sqrt{2}-2$，

$y=2-\sqrt{2}$，满足题意，所以$(\frac{y^2+x}{xy})_{\min}=\sqrt{2}+1$.

9．（2023•湖北武汉模拟•★★★）已知$x>0$，$y>0$，且$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，则$2x+y+\frac{2y}{x}$的最小值为_____.

答案：$5+4\sqrt{2}$

解法1：不易看出该怎么凑“积定”，可考虑由所给等式反解出y，代入消元再凑，

$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1\Rightarrow y=\frac{x}{x-2}$，由$x>0$和$y=\frac{x}{x-2}>0$得$x>2$，

所以$2x+y+\frac{2y}{x}=2x+\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{x-2}=2x+\frac{x+2}{x-2}=2x+\frac{(x-2)+4}{x-2}=2x+\frac{4}{x-2}+1=2(x-2)+\frac{4}{x-2}+5$

$\ge 2\sqrt{2(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}}+5=4\sqrt{2}+5$，

取等条件是$2(x-2)=\frac{4}{x-2}$，结合$x>2$解得：$x=2+\sqrt{2}$，所以$2x+y+\frac{2y}{x}$的最小值为$4\sqrt{2}+5$.

解法2：目标式中有一次齐次分式$\frac{2y}{x}$，考虑将前面的$2x+y$也化为一次齐次分式，可用“1”的代换来实现，

由题意，$2x+y+\frac{2y}{x}=(2x+y)\cdot 1+\frac{2y}{x}=(2x+y)(\frac{2}{x}+\frac{1}{y})+\frac{2y}{x}=4+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+1+\frac{2y}{x}$

$=\frac{2x}{y}+\frac{4y}{x}+5\geq 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}+5=4\sqrt{2}+5$，

当且仅当$\frac{2x}{y}=\frac{4y}{x}$时取等号，结合$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$可得此时$x=2+\sqrt{2}$，$y=1+\sqrt{2}$，所以$(2x+y+\frac{2y}{x})_{\min}=4\sqrt{2}+5$.

10．（★★★）已知 a，b，c 均为正数，且$abc=4(a+b)$，则$a+b+c$的最小值为_____.

答案：8

解析：由所给等式容易反解出 c，可尝试将其反解出来，并代入$a+b+c$中消去 c，

因为$abc=4(a+b)$，所以$c=\frac{4(a+b)}{ab}$，故$a+b+c=a+b+\frac{4(a+b)}{ab}$ ①，

求和的最小值的关键是凑积为定值，观察发现只要把分式拆开，就能凑出积定，

由①可得$a+b+c=a+\frac{4}{a}+b+\frac{4}{b}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}+2\sqrt{b\cdot\frac{4}{b}}=8$，

取等条件是$a=\frac{4}{a}$且$b=\frac{4}{b}$，此时$a=b=2$，所以$a+b+c$的最小值为 8.